

# Espérance d'utilité et nouveaux modèles de choix dans le risque : une connivence cachée

Louis Eeckhoudt

Volume 77, numéro 4, décembre 2001

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/602362ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/602362ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Eeckhoudt, L. (2001). Espérance d'utilité et nouveaux modèles de choix dans le risque : une connivence cachée. *L'Actualité économique*, 77(4), 499–516.  
<https://doi.org/10.7202/602362ar>

## ESPÉRANCE D'UTILITÉ ET NOUVEAUX MODÈLES DE CHOIX DANS LE RISQUE : UNE CONNIVENCE CACHÉE?\*

Louis EECKHOUDT

*Facultés Catholiques de Mons et de Lille  
et CORE (Louvain)*

### REMERCIEMENTS

Je remercie tout particulièrement les organisateurs de m'avoir invité à cette conférence dont la préparation m'a rappelé de lointains et agréables moments. En effet, c'est à l'occasion d'un séjour post-doctoral à l'Université Laval au début des années soixante-dix que Ph. Caperaa (Professeur au Département de Statistique) m'a remarquablement expliqué les éléments de base de la théorie économique du risque. Ma dette envers Ph. Caperaa est énorme et c'est donc très naturellement que je lui dédie ce texte.

M'exprimant au Québec, il est tout à fait légitime (et prudent?) de signaler aussi que j'ai pu progresser dans le domaine grâce à de nombreux et fructueux contacts avec des collègues aujourd'hui à l'École des Hautes Études Commerciales de Montréal, G. Dionne et P. Hansen.

Par ailleurs, des collègues français et hollandais beaucoup plus agiles que moi en mathématiques (H. Bleichrodt, A. Chateauneuf, M. Cohen, P. Wakker) ont eu beaucoup de patience pour m'initier aux nouveaux modèles de choix dans le risque.

Enfin, comme beaucoup le savent, j'ai énormément appris au cours d'une longue et régulière coopération avec C. Gollier.

---

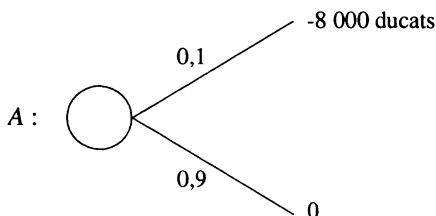
\* Texte de la conférence F.-A. Angers présentée au 41<sup>e</sup> Congrès annuel de la Société canadienne de science économique, Québec, mai 2001. Une première version de ce texte a bénéficié des commentaires et suggestions de G. Dionne, P. González et N. Treich.

## INTRODUCTION

Si on procédait à un « dico-trottoir » parmi les économistes intéressés par le risque et si on leur demandait quel nom de ville évoque pour eux le célèbre article de Bernoulli écrit en 1738, ils répondraient vraisemblablement : St-Petersbourg. En effet, depuis quelques décennies et année après année, les manuels d'économie et de finance ont décrit et redécrit le célèbre « paradoxe de St-Petersbourg » évoqué par Bernoulli pour justifier la concavité de la fonction d'utilité dans le cadre du modèle d'espérance d'utilité et ainsi expliquer l'aversion au risque.

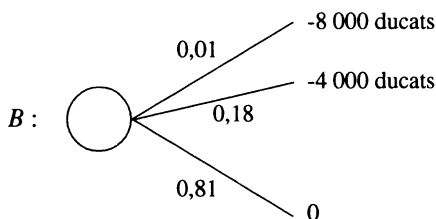
Cette insistance exclusive sur le fameux paradoxe a malheureusement occulté deux autres exemples présentés par Bernoulli pour défendre son point de vue. L'un de ces exemples met en scène un individu – baptisé « Sempronius » – qui doit rapatrier en métropole une fortune de 8 000 ducats situés dans une terre lointaine et qui ne peuvent être transportés que par mer.

Plutôt que de confier ses 8 000 ducats à un seul bateau, Sempronius a l'idée (*a priori* géniale) de partager sa fortune entre deux bateaux qui vont suivre des routes indépendantes. Grâce à cette idée Sempronius a transformé la loterie initiale (A)



(où 0,1 est la probabilité de perte suggérée par l'expérience journalière de l'époque)

en une nouvelle (B) caractérisée par :



L'espérance de perte (-800) est la même en A et en B. Toutefois comme la loterie B est mieux diversifiée (moins risquée), les individus riscophobes vont préférer B à A et ainsi donner une valeur implicite positive à la réduction du risque.

Cet exemple (extrêmement intuitif, comme tout le reste de l'article) est remarquable pour deux raisons.

La première est bien connue et tellement acceptée aujourd'hui qu'elle nous semble banale. L'exemple montre en effet que la valeur d'une loterie ne dépend pas que de son espérance mathématique, ce qui était l'idée prédominante au moment où Bernoulli a écrit son article.

La seconde raison est à mon sens plus « impressionnante ». En 25 lignes et sans aucune formalisation, Bernoulli anticipe l'apport, fait dans les années soixante et soixante-dix, et qui rendra si attractif le modèle d'espérance d'utilité : la capacité d'établir une liaison intime entre d'une part une notion statistique (« la réduction de risque à moyenne constante ») et d'autre part une attitude psychologique : la peur du risque mesurée par la concavité de la fonction d'utilité du décideur. Malheureusement cet apport si fondamental a été un peu perdu de vue à cause du caractère beaucoup plus spéculatif et croustillant du paradoxe de St-Pétersbourg.

Comme le laisse supposer ce retour à un passé lointain du modèle d'espérance d'utilité (E.U.), je vais tenter au cours de mon exposé de placer les nouveaux modèles de choix dans le risque dans une perspective un peu historique. Ils se situent à mon avis au second acte d'une pièce qui en contient trois. Le premier que j'intitulerai « c'était très beau » se déroule de 1738<sup>1</sup> à 1971. Il voit le développement du modèle d'espérance d'utilité et son apogée en sciences économiques avec l'article de Rothschild-Stiglitz (1970-1971).

À partir de 1971 et après quelques précurseurs apparaissent de façon systématique des doutes parfois très profonds quant à l'intérêt et à la validité du modèle d'espérance d'utilité. C'est le second acte : « C'était trop beau ». J'ai choisi ce titre car – de façon surprenante – les critiques au modèle E.U. seront faites non seulement de façon consciente par les initiateurs des nouveaux modèles, mais parfois aussi de façon (initialement) inconsciente par les utilisateurs et les « avocats » du modèle E.U. L'acte final intitulé « Tout compte fait, ce n'était pas si mal » contiendra mon effort d'évaluation des nouveaux modèles. J'essaierai de montrer que ceux-ci, en plus de leur intérêt propre, nous conduisent à jeter un nouveau regard sur le modèle E.U. lui-même.

Cette remarque limite bien la portée de mon intervention. Mon sujet d'intérêt essentiel est le modèle d'espérance d'utilité en dépit de ses limitations qui sont bien documentées aujourd'hui et qui ont dans une large mesure stimulé l'apparition de « nouveaux modèles » de choix dans le risque. Mon objectif ne sera pas de faire un inventaire de ces nombreux nouveaux modèles<sup>2</sup>. En réalité je me

1. 1738 est la date de publication de l'article de Bernoulli. Cependant en 1728, G. Cramer avait déjà écrit sur le sujet, comme Bernoulli le signale dans son propre texte.

2. J'en serais bien incapable et de plus mon effort serait très largement improductif. En effet cet inventaire a été remarquablement réalisé il y a peu par C. Starmer (2000).

contenterai d'évoquer les caractéristiques essentielles d'un de ces modèles dits d'« utilité dépendante du rang ». Ceci me permettra de mettre en évidence d'une part les progrès permis par ces modèles et d'autre part leur retentissement au sein du modèle E.U. lui-même, ce qui est mon objectif essentiel

### 1. C'ÉTAIT TRÈS BEAU (1738-1971)

Alors qu'elle semble connue très rapidement dans la communauté des actuaires germanophones, la contribution de Bernoulli ne suscite pratiquement pas d'intérêt chez les économistes pendant une longue période<sup>3</sup>, même si elle est parfois implicitement évoquée, comme dans un article célèbre de Ramsey en 1926<sup>4</sup>.

L'axiomatisation des idées de Bernoulli par von Neumann-Morgenstern (1947) va susciter un premier intérêt, d'autant plus qu'un peu auparavant on avait assisté à une axiomatisation de la théorie des choix en certitude.

Cependant, vu son caractère forcément technique, la contribution de von Neumann-Morgenstern a été peu parlante pour l'économiste moyen (de l'époque, sinon d'aujourd'hui). En réalité c'est l'article de Friedman-Savage (1948) – trop délaissé maintenant – qui va rendre accessible à la profession le texte fondateur. En outre Friedman et Savage vont définir les concepts si fondamentaux d'équivalent certain et de prime de risque absents de l'article de Bernoulli. Ces concepts ont l'avantage de correspondre à la démarche naturelle d'un économiste qui, par l'équivalent certain et la prime de risque, va pouvoir monétariser le coût psychologique du risque pour un décideur.

Par la suite – et laissant de côté les premières applications économiques qui sont faites dans les années soixante<sup>5</sup> – deux séries de contributions vont donner au modèle E.U. sa stature scientifique et vont l'imposer comme modèle de référence.

Dans deux publications quasi simultanées, J. Pratt (1964) et K. Arrow (1965) proposent différentes définitions de l'aversion au risque (et de son accroissement). Ces définitions sont différentes dans leur énoncé « littéraire » et sont chacune plausibles prises séparément. L'objectif (et la beauté) de l'article de Pratt consiste alors à montrer que ces définitions à première vue différentes, sont mathématiquement équivalentes. En outre, Arrow et Pratt vont proposer à l'aide d'une formule devenue célèbre, une approximation de la prime de risque<sup>6</sup>, montrant que

3. Un exposé fort intéressant de l'histoire du modèle E.U. peut être trouvé dans K. Borch (1990).

4. Je remercie Patrick González qui a attiré mon attention sur ce point.

5. Par exemple Borch (1962), Mossin (1968), Sandmo (1969) et Tobin (1958) que je cite pour ne pas être trop norvégien!

6. La prime de risque est la somme maximale que l'individu est prêt à payer pour remplacer une loterie par l'obtention avec certitude de son espérance mathématique. La définition formelle est rappelée à l'annexe 1.

celle-ci est le produit de la quantité de risque (une propriété « statistique » mesurée par la variance de la loterie<sup>7</sup>) et de l'aversion au risque de l'individu (une propriété « psychologique » mesurée par la concavité de l'utilité).

Quelques années plus tard, Rothschild-Stiglitz (1970 et 1971) (R.S.) vont écrire l'article « dual » de celui de Pratt. Alors que Pratt s'était très peu intéressé à la mesure du risque, R.S. vont préciser la notion d'« accroissement de risque à moyenne constante » (ARMC). La structure de leur article se calque sur celle de Pratt. Ils proposent des définitions différentes – chacune séparément plausible – d'un ARMC et puis établissent leur équivalence formelle. De façon très intéressante, les définitions intuitives sont de nature statistique (ajout de bruit blanc, transfert de poids du milieu vers les extrêmes), sauf une qui est « psychologique » et s'énonce approximativement comme suit : si deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont une même espérance et si tous les agents riscophobes sont unanimes à préférer  $X$  alors  $X$  est moins risquée que  $Y$ . En quelque sorte, R.S. réussissent à établir un pont remarquable entre d'une part la notion psychologique de peur du risque et d'autre part des mesures purement statistiques du changement de risque. À partir de là, aversion au risque et risque deviennent en quelque sorte le « dual » l'un de l'autre. Pour compléter le tableau dans son aspect historique, j'insiste sur le fait que l'exemple de Sempronius, évoqué à la page 1 et basé sur l'idée de diversification, représente un cas particulier d'ARMC, ce qui illustre bien le caractère fondamentalement précurseur de l'article de Bernoulli.

Si on ajoute à la remarquable dualité entre risque et aversion au risque le fait que le modèle E.U. connaît à la même époque une floraison d'applications en économie, bien sûr, mais aussi en finance ou en recherche opérationnelle, on pourra comprendre (et absoudre?) les chercheurs et étudiants de l'époque pour qui décision dans le risque et espérance d'utilité étaient pratiquement devenus des synonymes.

## 2. C'ÉTAIT TROP BEAU (1971-1995 [±])

Au moment où il s'impose aux économistes, le modèle E.U. va être mis en doute par les démarches d'« économie expérimentale ». Comme il est bien connu aujourd'hui, de multiples expériences ont montré que les individus n'adoptent pas face au risque les axiomes de l'E.U. et qu'ils semblent obéir à d'autres règles de comportement. Historiquement, la première « expérience » semble avoir été faite dès 1952 par M. Allais et le « paradoxe d'Allais », qui en est résultat, a dans notre communauté un statut un peu semblable à celui du « jeu de St-Pétersbourg » évoqué au début de ce présent article. Cette expérience a été répétée, raffinée<sup>8</sup> et il en est résulté une mise en doute de la validité descriptive du modèle E.U. qui a culminé avec la publication de la contribution de Kahneman et Tversky (1979).

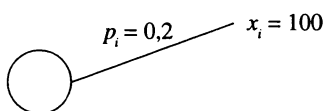
7. Ce résultat va conforter une idée très répandue à l'époque et suivant laquelle la variance est la mesure de la quantité de risque. L'article de Rothschild-Stiglitz évoqué plus bas va mettre partiellement en doute cette idée.

8. Pour des synthèses intéressantes, voir Starmer (2000) ou Machina (1987).

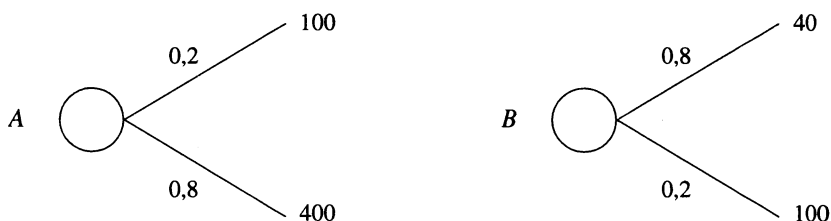
Beaucoup de nouveaux modèles de choix dans le risque ont trouvé leur origine et leur motivation dans la volonté de présenter une théorie en conformité avec les préférences exprimées par des individus en situation de risque. Comme je l'ai déjà indiqué, un de ces modèles est celui de l'« utilité dépendante du rang » (U.D.R.) développé notamment par Quiggin (1982), ou partiellement par Yaari (1987).

Si l'axiomatique qui soutient ce modèle est assez hermétique pour le non-mathématicien, son idée de base est séduisante et intuitive.

Considérons une branche  $i$  d'une loterie :



Si j'insère cette branche dans deux loteries différentes ( $A$  et  $B$ ) définies comme suit :



on remarquera que la branche  $i$  contribue de la même manière à l'espérance mathématique de  $A$  ou de  $B$ . En effet dans chacune des loteries elle apporte une valeur de 20 ( $0,2 \times 100$ ) au calcul de l'espérance de résultat.

Si un décideur utilise le modèle d'espérance d'utilité pour évaluer  $A$  et  $B$ , il donnera aussi à la branche  $i$  une valeur identique dans chaque loterie, à savoir  $0,2 \times U(100)$ . De façon évidente l'utilité est ici indépendante du rang.

Le modèle « U.D.R. » au contraire va nous faire observer que la même branche  $i$  joue des rôles très différents en  $A$  et  $B$ . Alors qu'elle correspond au plus mauvais résultat en  $A$ , elle génère le meilleur résultat en  $B$  et ceci va justifier au sein du modèle U.D.R. une contribution différente de la branche  $i$  à la valeur de chaque loterie. Cette contribution est capturée par l'idée de déformation des probabilités décrite dans l'annexe 2.

Bien évidemment parce qu'il fait preuve d'une plus grande souplesse que le modèle E.U. dans l'appréciation d'une loterie, le modèle U.D.R. permet aussi de

mieux coller aux préférences exprimées par des décideurs. En outre – et de façon intéressante – cette approche va contribuer à mettre en évidence une autre définition de la notion d'ARMC<sup>9</sup>.

L'axiomatisation du modèle U.D.R. a rendu populaire une notion simple et intéressante : celle de comonotonie. Deux variables aléatoires  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Z}$  sont comonotones (Cohen, 1995; Yaari, 1987) si pour toute paire d'états du monde  $s$  et  $s'$  on a que :

$$(X(s) - X(s')) (Z(s) - Z(s')) \geq 0.$$

En termes simples, si tout va bien (mal) pour  $\tilde{X}$ , tout va bien (mal) également pour  $\tilde{Z}$ . On conçoit alors aisément que si à  $\tilde{X}$  on ajoute  $\tilde{Z}$  une variable aléatoire d'espérance nulle, mais comonotone à  $\tilde{X}$  le résultat sera une variable aléatoire  $\tilde{Y}$  plus risquée que  $\tilde{X}$ . En effet, en  $\tilde{Y}$  les bons résultats de  $\tilde{X}$  deviendront encore meilleurs et les mauvais résultats de  $\tilde{X}$  deviendront pires. Cette idée est illustrée en détails par un exemple chiffré à l'annexe 3. Le lien avec l'axiomatique de base du modèle U.D.R. résulte du fait que le classement des résultats est identique en  $X$  et en  $Y$  : l'ajout de  $Z$  ne change pas le rang des résultats.

Comme nous allons le voir à partir de maintenant, la notion de comonotonie – qui est centrale dans un modèle alternatif à E.U. – va en fait avoir des répercussions inattendues et importantes, jusque dans le modèle E.U.

Avant de les analyser et pour mieux les évaluer, il est important cependant de mettre en évidence un fait souvent négligé. Alors que se développent les modèles alternatifs, les utilisateurs et les avocats du modèle classique d'E.U. mettent en évidence – parfois involontairement – des faiblesses du modèle E.U. J'évoque brièvement deux cas ici.

- a) En 1981, S. Ross (1981) tente de généraliser l'article de Pratt dans le sens suivant. La prime de risque dans Pratt est le montant que l'individu est prêt à payer pour éliminer le risque et recevoir en lieu et place son espérance mathématique. Pratt montre – conformément à l'intuition – que la prime augmente lorsque le décideur devient plus riscophobe. Ross s'intéresse alors à une réduction **partielle** de risque et il définit la prime associée au fait qu'un individu remplace une loterie risquée par une autre moins risquée mais de même espérance (voir annexe 1 pour une définition formelle). Il obtient alors que la prime pour une réduction partielle de risque ne croît pas nécessairement avec l'aversion au risque. Il apparaît ainsi que la « magnifique mécanique » de l'article de Pratt ne s'applique qu'au cas limite de l'élimination de risque. Elle s'écroule parfois si on s'intéresse au cas plus réel d'une réduction partielle du risque et ceci est évidemment une restriction sérieuse quant à la pertinence globale du modèle E.U.

9. Comme dans le modèle E.U., il y a donc aussi ici une sorte de dualité entre d'une part une attitude psychologique face à une loterie et d'autre part une notion statistique (ici la comonotonie).



Pour autant que je puisse juger, la critique de Ross n'a pas suscité l'intérêt des chercheurs. Une des raisons en est peut-être que cet auteur a cherché des restrictions sur la notion d'**accroissement d'aversion au risque** pour rétablir le résultat de Pratt. En fait, comme nous allons le voir, les modèles alternatifs à E.U. ont eux suggéré indirectement une **restriction sur la notion d'accroissement de risque** pour résoudre le paradoxe. Cette voie de recherche se révèle à mon avis plus prometteuse (voir la troisième section).

- b) La dualité entre aversion au risque et ARMC longuement évoquée à la section 1 porte sur des **préférences** : les riscophobes préfèrent éviter les ARMC. De façon naturelle on peut se demander si la même dualité existe au niveau des **choix**. À cette fin considérons le problème de choix le plus élémentaire possible, à savoir :

$$\text{Max}_{\alpha} E\left[U\left(W_0 + \alpha \tilde{X}\right)\right]$$

où  $W_0$  = richesse initiale de l'individu;

$\alpha$  = montant investi dans le risque

et  $\tilde{X}$  = le rendement aléatoire par dollar investi.

Dans son article de 1964, Pratt<sup>10</sup> montre que si le décideur devient plus riscophobe, il va conformément à l'intuition réduire la valeur optimale de  $\alpha$ . Fort de la symétrie en termes de préférence entre aversion au risque et ARMC, on s'attend alors à pouvoir montrer que si la variable aléatoire  $x$  est remplacée par un aléa  $y$  plus risqué et de même espérance, le décideur va aussi réduire  $\alpha$ , c'est-à-dire son exposition au risque. Sans beaucoup insister, R.S. avaient déjà indiqué que ce résultat n'était pas nécessairement vrai. Il en est résulté un courant de recherche assez actif (recensé par Eeckhoudt-Gollier, 2000) dans lequel on a cherché des restrictions à imposer, soit à la fonction d'utilité, soit au changement de risque pour rétablir la dualité entre aversion au risque et accroissement de risque dans le domaine des choix (et non plus des préférences). Cette voie de recherche a – semble-t-il – trouvé son terme dans l'article de Gollier (1995). J'y reviendrai dans la section 3 car cet article – en plus d'une généralisation des travaux antérieurs – fournit une idée novatrice pour la définition même de la notion d'accroissement de risque.

Les observations faites en a et b résultent de travaux menés dans le cadre du modèle E.U. Elles montrent que l'enthousiasme suscité par la séquence des articles de Pratt et de R.S. doit être tempéré. En fait, si on veut étendre leurs résultats à des problèmes un peu plus complexes, on est obligé de restreindre (et non d'élargir) soit le concept d'utilité, soit le concept de changement de risque. Cette considération va jouer un rôle important dans l'appréciation des nouveaux modèles de choix dans le risque.

10. Dans la suite de l'article, j'expliquerai les circonstances curieuses qui ont vraisemblablement amené Pratt à considérer ce problème à la toute fin de son article.

### 3. TOUT COMPTE FAIT, CE N'ÉTAIT PAS SI MAL (1995 [±]...)

Quel bilan tirer de tout ce foisonnement intellectuel autour de la théorie des choix dans le risque? Qu'avons-nous appris des nouveaux modèles tels que le modèle UDR?

Mon sentiment général est que les nouveaux modèles baptisés parfois à tort d'alternatifs ont permis d'améliorer le modèle E.U. et de mieux en saisir d'une part l'intérêt et d'autre part les limites. Je voudrais illustrer cette idée en évoquant quelques points successifs un peu dans le désordre.

- a) En termes d'explication des préférences révélées par les individus lors d'interviews à propos de loteries, les nouveaux modèles – qui sont plus souples que celui d'E.U. – ont forcément un plus grand pouvoir explicatif. Sur le plan descriptif ils dominent donc clairement E.U.<sup>11</sup>. Par contre lorsqu'on s'intéresse aux décisions individuelles (ou à leur coordination par le marché), ces modèles doivent « performer » moins bien que celui d'E.U. Parce qu'ils sont plus généraux que E.U., les nouveaux modèles sont évidemment incapables de résoudre les paradoxes relatifs aux choix (ou aux marchés) observés dans le cadre E.U. En fait, handicapés par leur plus grande généralisation, ils ne peuvent qu'exacerber ces paradoxes. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que de nombreux modèles d'équilibre partiel ou général tant en économie qu'en finance fonctionnent avec des versions restrictives de E.U. (et non des généralisations). Que l'on songe par exemple à l'hypothèse d'utilité quadratique en gestion de portefeuille ou – plus près de nous – aux modèles de partage des risques et aux modèles intertemporels d'évaluation d'actifs qui recourent tantôt à l'hypothèse d'aversion relative au risque constante dans la richesse<sup>12</sup>, tantôt à l'hypothèse de linéarité de la tolérance au risque.

Cette constatation indique bien que dans un grand nombre de domaines portant sur l'analyse des choix optimaux et leur coordination par les marchés, il va être difficile de dépasser le modèle E.U. En fait, l'agenda de recherche consisterait plutôt à rester dans le cadre du modèle E.U. et à essayer de rendre moins contraignants ses cas particuliers adoptés jusqu'ici.

- b) Les nouveaux modèles ont conduit les adeptes de l'E.U. à considérer une attitude plus souple dans la définition même du concept d'aversion au risque. En E.U. l'aversion au risque résulte de la concavité de l'utilité dans la richesse (ou la consommation), c'est-à-dire de la décroissance de l'utilité marginale, une propriété qui est déjà compréhensible en-dehors de tout risque. Cette complé-

11. Toutefois si l'on tient compte de leur plus grande généralité au départ, le jugement quant à leur pouvoir explicatif doit être nuancé. Voir par exemple Hey-Orme (1994).

12. Je reconnais bien volontiers que tout récemment on a vu se développer des modèles d'évaluation d'actifs basés sur les nouveaux modèles. Un très bel exemple est constitué par l'article de Barberi *et al.* (2001) qui redéfinit le C.A.P.M. intertemporel dans le cadre de la *prospect theory*. À noter toutefois que pour la partie E.U. du modèle, les auteurs ont recours également au cas particulier d'une fonction d'utilité de type « puissance ».

mentarité surprenante – à savoir expliquer l'attitude vis-à-vis du risque par une hypothèse en certitude – a suscité un courant de réflexion fort intéressant en recherche opérationnelle qui est généralement ignoré en sciences économiques (voir par exemple Dyer et Sarin, 1982 ou Bouyssou et Vansnick, 1990) et qui est basé sur la distinction entre fonction de valeur (en certitude) et fonction d'utilité (dans le risque). Faute de temps et d'espace, je ne pourrai développer ce point ici mais j'encourage les lecteurs intéressés à retourner aux sources.

De plus comme il résulte des articles de Pratt et de R.S., la concavité de  $U$  implique automatiquement et simultanément l'obtention des résultats suivants :

- un individu riscophobe préfère toujours  $E(\tilde{X})$  à la loterie  $X$  elle-même;
- un individu riscophobe préfère  $X$  à  $Y$  si  $E(\tilde{X}) = E(\tilde{Y})$  et si  $X$  est moins risqué que  $Y$ .

Les nouveaux modèles (et celui de UDR en particulier) montrent que ces deux conditions peuvent ne pas être vraies simultanément. Obligé de comparer  $X$  à  $E(\tilde{X})$  un individu peut se laisser séduire par une préférence systématique en faveur de la certitude garantie par  $E(\tilde{X})$ . Cependant s'il doit choisir entre deux perspectives risquées de même espérance  $X$  et  $Y$  dont l'une (disons  $Y$ ) est plus risquée, on peut concevoir qu'il préfère  $Y$  car de toute manière il doit accepter du risque vu que son choix doit se faire entre deux aléas (pour plus de détails, voir M. Cohen, 1995).

Ce résultat – qui émerge déjà dans les modèles très simples de RDU – m'a toujours impressionné. Il met en évidence une rigidité lourde du modèle E.U. et propose une voie d'assouplissement indiquant bien l'importance du « contexte » dans la formation des préférences.

- c) De façon plus importante et sans doute plus systématique, les nouveaux modèles nous amènent à réfléchir à la **définition même d'un ARMC**. Alors que – comme nous venons de le voir – la notion d'aversion au risque est très rigide dans le modèle E.U., celle d'ARMC telle que proposée dans le même cadre par R.S. est assez flexible<sup>13</sup>. On comprend intuitivement que ce déséquilibre a provoqué les paradoxes évoqués dans la deuxième section.

Les nouveaux modèles nous permettent aujourd'hui de mieux gérer cette discordance.

Par exemple, à travers la notion de comonotonie et l'adoption d'une définition plus restrictive de l'ARMC<sup>14</sup> qui en résulte, on peut résoudre le paradoxe soulevé

13. Cette flexibilité s'exprime au travers de la « condition intégrale » (voir littérature sur la dominance stochastique) par laquelle on parvient à comparer en termes de préférence des lois cumulées qui s'intersectent plusieurs fois. C'est cette possibilité d'intersections multiples qui engendre la « souplesse » de la définition de R.S.

14. Cette définition implique que les lois cumulées vont se croiser une seule fois. Il s'agit d'une version particulière de la *single crossing property* évoquée pour la première fois en économie par P. Hammond (1975). Voir aussi Meyer-Ormiston (1989).

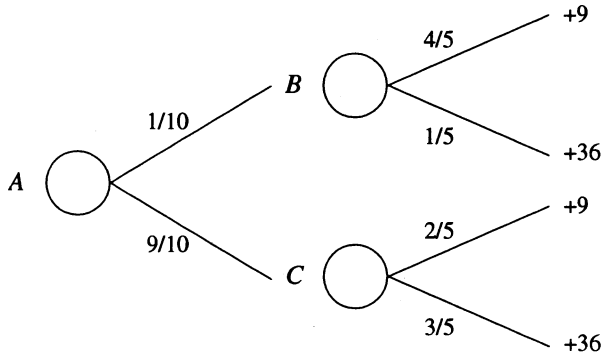
par Ross. De plus, il est possible de montrer que l'ajout d'une variable aléatoire comonotone d'espérance nulle à un risque  $X$  va amener tous les investisseurs à réduire leur exposition au risque moyennant une restriction mineure sur la fonction d'utilité (à savoir la décroissance de l'aversion au risque quand la richesse augmente). Il apparaît ainsi que la notion statistique associée aux nouveaux modèles (celle de comonotonie) permet de mieux intégrer dans le modèle E.U. les choix et les préférences, ce qui était loin d'être évident auparavant.

Dans cette perspective, il est intéressant de signaler que la littérature sur l'impact des accroissements de risque en termes de choix débouche indirectement sur une nouvelle définition potentiellement très utile de l'accroissement de risque (de la même manière que nous avons aujourd'hui plusieurs définitions possibles de l'aversion au risque. Voir point b)).

Dans la perspective de R.S., l'accroissement de risque est lié à la plus grande variabilité dans les résultats d'une loterie et il se rattache ainsi à la dominance stochastique d'ordre 2 (dont il est un cas particulier). Or, dans le langage de tous les jours, un accroissement de risque signifie bien souvent une probabilité plus élevée d'accident, ce qui correspond à la dominance stochastique d'ordre 1. Dans un article de 1995 (déjà mentionné dans la deuxième section), Gollier montre que certains changements de risque correspondant tantôt à la dominance stochastique d'ordre 2 et tantôt à celle d'ordre 1 peuvent amener **tous** les agents riscophobes à choisir des portefeuilles moins risqués<sup>15</sup>. Cette constatation suggère l'intérêt d'un nouveau regard sur la notion même d'accroissement de risque. Ne pourrait-on pas dire qu'il y a accroissement de risque si, en réponse à ce changement, tous les agents riscophobes sont unanimes à réduire leur exposition au risque? Au lieu d'associer le changement de risque à des préférences – comme l'avaient fait R.S. –, ne pourrait-on pas l'adosser aux choix? Adopter ce point de vue conduit évidemment à reconsidérer tout un pan important de nos connaissances actuelles dans le domaine. De plus si cette proposition était suivie, elle pourrait à son tour donner lieu à des expérimentations intéressantes afin de vérifier si les choix des individus confrontés à des risques différents s'ajustent bien dans le sens indiqué par cette nouvelle approche.

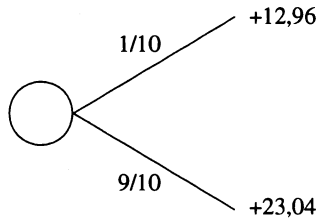
d) Une des causes du succès du modèle E.U. a été sa parfaite adéquation avec l'analyse des problèmes de gestion par les « arbres de décision » (voir à ce propos La Valle et Wapman, 1986). Cette adéquation est liée à la propriété de « linéarité dans les probabilités » qui caractérise le modèle E.U. et qui permet d'évaluer des loteries séquentielles de deux manières assez différentes tout en obtenant le même résultat, une situation assez confortable. Illustrons ceci par un exemple simple. Soit un individu qui adopte les axiomes de E.U. et donc la fonction d'utilité s'écrit  $U = \sqrt{W}$ . Cet individu doit évaluer la loterie séquentielle  $A$  définie comme suit :

15. Pour le cas spécifique de la dominance stochastique d'ordre 1, voir aussi Eeckhoudt-Gollier (1995) qui généralisent la notion de rapport de vraisemblance monotone.



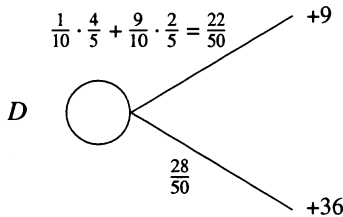
Pour évaluer A, le décideur peut soit :

- calculer les équivalents certains de B et de C, à savoir 12,96 et 23,04 et ensuite calculer l'équivalent certain (E.C.) de la loterie :



le résultat est E.C. = 21,90;

- ou utiliser le calcul des probabilités et considérer que la loterie A est équivalente à une loterie D :



Un calcul simple montre alors que l'équivalent certain de D est aussi égal à **21,90**! L'évaluation de A peut donc se faire soit de façon séquentielle, soit de façon directe et conduire au même résultat! Jusqu'il y a peu, j'ai toujours considéré cette concordance comme un atout du modèle E.U. d'autant plus important qu'il n'est pas partagé par les nouveaux modèles. Considérons en effet un décideur qui adopte les axiomes de la théorie duale de Yaari (1987) avec une fonction de transformation des probabilités donnée par  $h(p) = \sqrt{p}$ .

Dans ce cas, les deux façons de calculer l'équivalent certain de  $A$  divergent. La méthode récursive conduit à un équivalent certain de 16,69 tandis que la seconde aboutit à une valeur de 18,10.

Cette divergence m'est toujours apparue comme une lacune grave des nouvelles théories car les rendant inopérantes pour le déroulement des arbres de décision. Je dois avouer cependant qu'une conversation récente avec P. Wakker a ébranlé mes convictions. Pour les partisans des nouveaux modèles, la divergence est plutôt... une force. En effet, elle répondrait au fait que certains individus raisonnent de façon récursive et que d'autres ne le font pas. À nouveau, les nouveaux modèles introduisent une dose de flexibilité dans notre conception de l'attitude face au risque.

#### CONCLUSION

Ces 25 dernières années furent rudes pour le modèle E.U.! Après beaucoup de turbulences, une sorte de consensus semble cependant largement accepté dans notre profession.

Les nouveaux modèles n'ont pas renversé l'ancien. Bien au contraire. En plus de leur intérêt propre (notamment en économie expérimentale) ils ont permis de rendre explicites certaines lacunes implicites du modèle E.U. et d'y porter remède. Le champ de la « décision dans le risque » reste donc porteur pour les jeunes chercheurs. À côté des nombreuses opportunités d'application et de liens avec d'autres disciplines (recherche opérationnelle, psychologie, distribution de la richesse par exemple), il reste aussi des possibilités enrichissantes d'investigations théoriques fondamentales.

## ANNEXE 1

Si on dénote par :

$W_0$ , la richesse sûre de l'individu

$X$ , une loterie additive d'espérance  $E(\tilde{X})$

$U$ , la fonction d'utilité,

la prime de risque associée à  $X$  – dénotée  $\Pi$  – est solution de :

$$E[U(W_0 + \tilde{X})] = U(W_0 + E(\tilde{X}) - \Pi) \quad (\text{A.1.1})$$

$\Pi$  mesure donc bien ce que l'individu est prêt à payer pour éliminer le risque  $X$  et le remplacer par la certitude de son espérance mathématique. Grâce à l'approximation d'Arrow-Pratt on montre alors que :

$$\Pi \approx \frac{\sigma_{\tilde{X}}^2}{2} \cdot \left( - \frac{U''}{U'} \right)$$

où  $-\frac{U''}{U'}$  est le degré d'aversion absolue au risque.

La notion d'élimination partielle du risque proposée par Ross (1981) consiste à définir ce que l'individu est prêt à payer pour réduire le risque de  $X$ , c'est-à-dire pour remplacer  $X$  par un autre aléa  $T$  tel que :

$$E(\tilde{X}) = E(\tilde{T})$$

et avec  $T$  correspondant à une réduction de risque au sens de R.S.

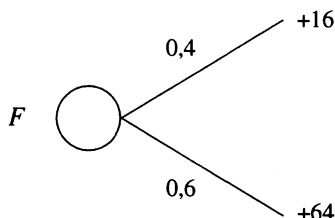
Formellement, cette prime partielle ( $\hat{\Pi}$ ) est définie par :

$$E[U(W_0 + \tilde{X})] = E[U(W_0 + \tilde{T} - \hat{\Pi})]. \quad (\text{A.1.2})$$

Alors que  $\Pi$  est toujours croissante dans le degré d'aversion au risque, il n'en va pas nécessairement de même pour  $\hat{\Pi}$ , une conclusion très gênante qui met en doute la pertinence du modèle générant ce résultat.

## ANNEXE 2

La notion de transformation des probabilités qui caractérise les modèles R.D.U. mériterait évidemment de longs développements. Toutefois, il est facile d'en illustrer le principe et l'intérêt dans le cadre de loteries binaires. Soit une loterie  $F$  :



dont l'espérance mathématique est  $E(\tilde{F}) = 44,8$ .

Pour manifester l'aversion au risque, on peut :

- soit comme Bernoulli transformer les conséquences (+16 et +64) par une fonction d'utilité croissante et concave. Par exemple si

$$U = \sqrt{W}$$

$$\text{alors } E[U(\tilde{F})] = (0,4) \cdot 4 + (0,6) \cdot 8 = 6,4$$

de sorte que l'équivalent certain de  $F = 40,96$ . Comme cette valeur est inférieure à  $E(\tilde{F}) = 44,8$ , il y a bien aversion au risque;

- soit accorder à la probabilité de l'événement le plus défavorable (c'est-à-dire de « plus mauvais rang ») un poids, une probabilité supérieure à 0,4. Si on adopte une déformation des probabilités définie par  $h(p) = \sqrt{p}$ , l'E.C. de la loterie est :  $(\sqrt{0,4})16 + (1 - \sqrt{0,4})64 = 33,64$ , c'est-à-dire un nombre de nouveau inférieur à 44,8.

La démarche décrite ici est celle proposée par Yaari (1987).

Dans le modèle R.D.U., on procède à la fois à la déformation des conséquences et à celle des probabilités.



## ANNEXE 3

Pour illustrer la comonotonie, considérons deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies comme suit :

$p$	$x$	$z$	$y$
0,2	-20	-6	-26
0,4	-10	-4	-14
0,3	+20	+3	+23
0,1	+30	+19	+49
	$E(\tilde{X}) = -1$	$E(\tilde{Z}) = 0$	$E(\tilde{Y}) = -1$

$X$  et  $Z$  sont comonotones car :

$$(x_i - x_j)(z_i - z_j) \geq 0 \quad \forall i, j.$$

Si on ajoute  $Z$  à  $X$ , on obtient une nouvelle variable aléatoire  $Y$  plus risquée que  $X$  et de même espérance.

Si on trace les lois cumulées de  $X$  et de  $Y$ , on constate qu'elles ne s'intersectent qu'une seule fois (en  $x = 20$ ) et qu'il y a une régularité dans leur « écart horizontal » reflété par la condition suivante :

$$\frac{d}{ds} (F^{-1}(s) - G^{-1}(s)) \leq 0 \quad \text{pour tout } s, \quad (\text{A.3.1})$$

c'est-à-dire que l'écart horizontal décroît quand  $s$  augmente.

L'ajout d'une variable aléatoire comonotone d'espérance nulle à un aléa génère une nouvelle variable aléatoire qui est « plus dispersée » au sens de Bickel-Lehmann (1979).

Il est important de remarquer que l'ajout d'une variable aléatoire comonotone va faire que les lois cumulées ne se couperont qu'une seule fois avec en plus la structure particulière indiquée par (A.2.1). Il s'agit à l'évidence d'une définition de l'accroissement de risque plus restrictive que celle de R.S. qui permet des intersections multiples entre lois cumulées (voir leur « condition intégrale »).

## BIBLIOGRAPHIE

- ALLAIS, M. (1952), *Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'École Américaine*, CNRS, Paris.
- ARROW, K. (1965), *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Yrjo Johnsson Saatio, Helsinki.
- BARBERIS, N., M. HUANG et T. SANTOS (2001), « Prospect Theory and Asset Prices », *Quarterly Journal of Economics*, 116 : 1-54.
- BERNOULLI, D. (1738), « Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis », *Proceedings of the Imperial Academy*, 5 : 175-192.
- BICKEL, P.J. et E. LEHMANN (1979), « Descriptive Statistics for Non Parametric Models: Spread », in JANE JURESKOVA (éd.), *Contributions to Statistics*, Reidel, Amsterdam.
- BORCH, K. (1990), *Economics of Insurance*, North-Holland, 402 pages.
- BORCH, K. (1962), « Equilibrium in a Reinsurance Market », *Econometrica*, 30 : 424-444.
- BOUYSSOU, D. et J.C. VANSNICK (1990), « “ Utilité cardinale ” dans le certain et choix dans le risque », *Revue Économique*, 41 : 979-1 000.
- COHEN, M. (1995), « Risk Aversion Concepts in Expected – and Non-Expected – Utility Models », *The Geneva Papers in Risk and Insurance Theory*, 20 : 73-92.
- DYER, J. et R. SARIN (1981), « Relative Risk Aversion », *Management Science*, 28 : 875-886.
- EECKHOUDT, L. et C. GOLLIER (1995), « Demand for Risky Assets and the Monotone Probability Ratio Order », *Journal of Risk and Uncertainty*, 11 : 113-122.
- EECKHOUDT, L. et C. GOLLIER (2000), « The Effects of Changes in Risk on Risk Taking: A Survey », in G. DIONNE (éd.), *Handbook of Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- FRIEDMAN, M. et L. SAVAGE (1948), « The Utility Analysis of Choices Involving Risk », *Journal of Political Economy*, 56 : 279-304.
- GOLLIER, C. (1995), « The Comparative Statics of Changes in Risk Revisited », *Journal of Economic Theory*, 66 : 522-536.
- HAMMOND, P. (1974), « Simplifying Choice Between Uncertain Prospects where Preference is Non Linear », *Management Science*, 20 : 1 047-1 072.
- HEY, J. et C. ORME (1994), « Investigating Generalizations of Expected Utility Theory Using Experimental Data », *Econometrica*, 62 : 1 291-1 326.
- KAHNEMAN, D. et A. TVERSKY (1979), « Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk », *Econometrica*, 47 : 263-291.
- LA VALLE, I. et K. WAPMAN (1986), « Rolling Back Decision Trees Requires the Independence Axiom! », *Management Science*, 32 : 382-385.
- MACHINA, M. (1987), « Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved », *Journal of Economic Perspectives*, 1 : 121-154.

- MEYER, J. et M. ORMISTON (1989), « Deterministic Transformations of Random Variables and the Comparative Statics of Risk », *Journal of Risk and Uncertainty*, 2 : 179-188.
- PRATT, J. (1964), « Risk Aversion in the Small and in the Large », *Econometrica*, 32 : 122-136.
- QUIGGIN, J. (1982), « A Theory of Anticipated Utility », *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3 : 323-343.
- RAMSEY, F. (1926), « Truth and Probability », in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* (1931), Harcourt Brace Cy.
- ROSS, S. (1981), « Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large with Applications », *Econometrica*, 49 : 621-638.
- ROTHSCHILD, M. et J. STIGLITZ (1970), « Increasing Risk I. A Definition », *Journal of Economic Theory*, 2 : 225-243.
- ROTHSCHILD, M. et J. STIGLITZ (1971), « Increasing Risk II: Its Economic Consequences », *Journal of Economic Theory*, 5 : 66-84.
- SANDMO, A. (1969), « Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice », *Econometrica*, 37 : 568-599.
- STARMER, C. (2000), « Developments in Non-Expected Utility Theory: The Hunt for a Descriptive Theory of Choice under Risk », *Journal of Economic Literature*, 38 : 332-382.
- TOBIN, J. (1958), « Liquidity Preference as Behavior Towards Risk », *Review of Economic Studies*, 25 : 65-86.
- VON NEUMANN, J. et O. MORGENTERN (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.
- YAARI, M. (1987), « The Dual Theory of Choice under Risk », *Econometrica*, 55 : 95-115.